

4. Největší společný dělitel, nejmenší společný násobek

NEJVĚTŠÍ SPOLEČNÝ DĚLITEL daných čísel - nm. $D(a, b)$, příp. $D(a, b, c), \dots$
 - největší číslo, kterým lze vydělit současně daná čísla

př. Vypočítat $D(36, 48, 60)$

1. upř. UŽITÍM MNOŽIN DĚLITELŮ: největší ze všech společných dělitelů
 těchto čísel

$$D(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} 36 & 18 & 12 & 9 & 6 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \end{array}$$

$$D(48) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c} 48 & 24 & 16 & 12 & 8 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \end{array}$$

$$D(60) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\} \quad \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 60 & 30 & 20 & 15 & 12 & 10 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

MNOŽINA DĚLITELŮ

$$D(36) \cap D(48) \cap D(60) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

NEJVĚTŠÍ SPOLEČNÝ DĚLITEL

$$D(36, 48, 60) = 12 \quad (! \text{ ČÍSLO - NEMNOŽINA })$$

! POZOR NA SPRÁVNÉ ZÁPISY
 - dělitele
 - mm. dělitelů
 - největší společný dělitel

2. upř. UŽITÍM PRVOČÍSELNÝCH ROZKLADŮ

$$\left. \begin{aligned} 36 &= 6 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2 \\ 48 &= 6 \cdot 8 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 \cdot 3 \\ 60 &= 6 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \end{aligned} \right\} D(36, 48, 60) = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$$

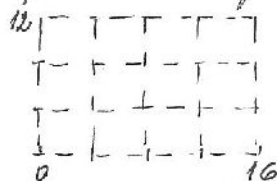
- součin NEJMENŠÍCH MOCNIN Kterých PRVOČÍSEL vyskytlých se
 současně ve všech prvočíselných rozkladech
 (součin prvočísel s nejmenší mocninou, kterými lze všechna
 čísla SOUČASNĚ DĚLIT)

př. Vypočítat zlomek, u nějž největší společný dělitel

$$\frac{36}{60} = \left[\frac{36:6}{60:6} \right] = \frac{6}{10} = \left[\frac{6:2}{10:2} \right] = \frac{3}{5} \quad D(36, 60) = 6 \cdot 2 = 12$$

$$\frac{36}{60} = \left(\frac{36:12}{60:12} \right) = \frac{3}{5}$$

př. Obdélník o stranách 16 cm a 12 cm rozděl na co nejmenší
 počet shodných čtverců. Uveď jejich počet a délku strany.



- nejmenší počet $\Rightarrow$ největší čtverce $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ největší délka strany
 $\Rightarrow$ hledáme

$$D(12, 16) = 4 \Rightarrow a = 4 \text{ cm}$$

- uveď: kolikrát každou stranu - počet čtverců

$$x = \frac{12}{4} \cdot \frac{16}{4} = 3 \cdot 4 = 12 \text{ čtverců}$$

Příklady

1. úk.

$$a) D(60, 84) = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$$

5.28

$$60 = 6 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

$$84 = 4 \cdot 21 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^1$$

[prvočíslný rozklad lze dělat různě - viz předchozí článek]

b) $D(720, 1080)$

20
 $720 = 72 \cdot 10 = 2 \cdot 36 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 18 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$
 $1080 = 108 \cdot 10 = 2 \cdot 54 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 27 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 5 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$
 $D(720, 1080) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 40 \cdot 9 = \underline{360}$

c) $D(456, 1260)$

20
 $456 = 2 \cdot 378 = 2 \cdot 2 \cdot 189 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 63 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 21 = (2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7$
 $1260 = 10 \cdot 126 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 63 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 21 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = (2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
 $D(456, 1260) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 4 \cdot 9 \cdot 7 = 4 \cdot 63 = \underline{252}$

d) $D(30, 42, 66)$

20
 $30 = 3 \cdot 10 = 3 \cdot 2 \cdot 5 = (2 \cdot 3 \cdot 5) = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1$
 $42 = 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 7 = (2 \cdot 3 \cdot 7) = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 7^1$
 $66 = 6 \cdot 11 = 2 \cdot 3 \cdot 11 = (2 \cdot 3 \cdot 11) = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 11^1$
 $D(30, 42, 66) = 2 \cdot 3 = \underline{6}$

NEJMENŠÍ SPOLEČNÝ NÁSOBEK - $n.n.$ $mv(a, b)$, $p.e.$ $m(a, b, c), \dots$

- nejmenší číslo, které je násobkem všech čísel

10) Učí $m(6, 21, 28)$

1. zp. UŽITÍM MNOŽIN NÁSOBKŮ (vhodné pro malá čísla) *nejmenší ze všech společných násobků těchto čísel*
 $N(6) = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, \underline{84}, \dots\}$
 $N(21) = \{21, 42, 63, \underline{84}, \dots\}$
 $N(28) = \{28, 56, \underline{84}, \dots\}$
 $\Rightarrow m(6, 21, 28) = 84$

2. zp. UŽITÍM PRVOČÍSELNÝCH ROZKLADŮ - *součin nejmenších mocnin různých prvočísel vyskytujících se v aspoň jednom rozkladu*
 $\left. \begin{array}{l} 6 = 2 \cdot 3 \\ 21 = 3 \cdot 7 \\ 28 = 2^2 \cdot 7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} mv(6, 21, 28) = \\ = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^1 = \\ = 4 \cdot 3 \cdot 7 = \underline{84} \end{array}$
[součin všech různých prvočísel ku nimž konkrétně a NEJVYŠŠÍ MOCNINOU]

3. zp. u menších čísel ZPAMĚTI

$m(6, 21, 28)$

- vyhledáme podmínku násobky nejmenšího čísla a hledáme, kde jsou dělitelní ostatními čísy

28 $(6 \cdot 28; 21 \cdot 28)$
 56 $(6 \cdot 56; 21 \cdot 56)$
 84 $(6 \cdot 84; 21 \cdot 84) \Rightarrow m(6, 21, 28) = 84$

$\frac{5}{6} + \frac{8}{21} - \frac{3}{28} = \frac{14 \cdot 5 + 4 \cdot 8 - 3 \cdot 3}{84} = \frac{70 + 32 - 9}{84} = \frac{102 - 9}{84} = \frac{93}{84} = \frac{31}{28}$

UŽITÍ: Klomky - SOUČET, ROZDÍL $\rightarrow$ NEJMENŠÍ SPOLEČNÝ JHENOVAATEL

10) Učí nejmenší společný jmenovatel klomků $\frac{5}{6}, \frac{7}{120}$
 z hlediska nejmn. společný násobek $m(36, 120)$

1. zp. - ZPAMĚTI

$\left[\begin{array}{ccc} 120 & 240 & \underline{360} \\ 36 \cdot 120 & 36 \cdot 240 & 36 \cdot 360 \end{array} \right]$
 $m(36, 120) = 360$

2. zp.

$120 = 12 \cdot 10 = 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5) = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1$
 $36 = 3 \cdot 12 = 3 \cdot 3 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot (3 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3^2$
 $\left. \begin{array}{l} 120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \\ 36 = 2^2 \cdot 3^2 \end{array} \right\} m(36, 120) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = \underline{360}$

6) Učí nejmenší společný dělitel a nejmenší společný násobek čísel 756 a 1680

$$756 = 4 \cdot 189 = 2 \cdot 2 \cdot 63 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 7$$

$$1680 = 168 \cdot 10 = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 42 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

ROZLIŠUJ! $D(756, 1680) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 4 \cdot 21 = 84$
 $= 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$

NEJMENŠÍ
ČÍSLO, KTERÝM LZE OBE
ČÍSLO VYDĚLIT

$$m(756, 1680) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 15120$$

$$= 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 15120$$

NEJMENŠÍ
ČÍSLO, KTERÉ JE
DĚLITELNÉ
OBEMA ČÍSLO

Příklady

2) Učí (užívám pročíselných kalkulací)

5.29
a) b) c) d)

a) $m(24, 40)$

$$\left. \begin{array}{l} 24 = 6 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3 \\ 40 = 4 \cdot 10 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5 \end{array} \right\} m(24, 40) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 8 \cdot 3 \cdot 5 = 40 \cdot 3 = 120$$

b) $m(27, 56)$

$$\left. \begin{array}{l} 27 = 3 \cdot 9 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 \\ 56 = 8 \cdot 7 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^3 \cdot 7 \end{array} \right\} \Rightarrow m(27, 56) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 = 8 \cdot 27 \cdot 7 = 1512$$

c) $m(54, 126)$

$$\left. \begin{array}{l} 54 = 6 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^3 \\ 126 = 2 \cdot 63 = 2 \cdot 9 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \end{array} \right\} m(54, 126) = 2 \cdot 3^3 \cdot 7 = 2 \cdot 27 \cdot 7 = 378$$

d) $m(12, 18, 30)$

$$\left. \begin{array}{l} 12 = 3 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 \\ 18 = 3 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2 \\ 30 = 3 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{array} \right\} \Rightarrow m(12, 18, 30) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 4 \cdot 9 \cdot 5 = 180$$

3) Vypočítá v rozkladním tvaru $\frac{135}{495}$

5.30
1) 2)

$$\frac{135}{495} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

(kročíme 5) (kročíme 9)
POSTUPNĚ KRÁČÍME

$$\text{nebo } \frac{135}{495} = \left[\frac{135 : 45}{495 : 45} \right] = \frac{3}{11}$$

$$\left. \begin{array}{l} 135 = 5 \cdot 27 = 5 \cdot 3 \cdot 9 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \\ 495 = 5 \cdot 99 = 5 \cdot 9 \cdot 11 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \end{array} \right\} D(135, 495) = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 9 \cdot 5 = 45$$

4) Vypočítá

5.31
a) b)

$$a) \frac{3}{10} + \frac{7}{16} - \frac{13}{24} = \frac{3 \cdot 24 + 7 \cdot 15 - 13 \cdot 10}{240} = \frac{72 + 105 - 130}{240} = \frac{177 - 130}{240} = \frac{47}{240}$$

$$\left[\begin{array}{l} 10 = 2 \cdot 5 \\ 16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 \\ 24 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3 \end{array} \right\} m(10, 16, 24) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 16 \cdot 3 \cdot 5 = 240$$

$$b) \frac{5}{6} + \frac{7}{15} + \frac{8}{25} = \frac{5 \cdot 25 + 7 \cdot 10 + 8 \cdot 6}{150} = \frac{125 + 70 + 48}{150} = \frac{243}{150} = \frac{81}{50}$$

$$\left. \begin{array}{l} 6 = 2 \cdot 3 \\ 15 = 3 \cdot 5 \\ 25 = 5 \cdot 5 = 5^2 \end{array} \right\} m(6, 15, 25) = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 6 \cdot 25 = 150$$

5) Učí nejmenší společný jmenovatel

5.32
a) b)

a) $\frac{1}{12}, \frac{3}{32}$

$$\left. \begin{array}{l} 12 = 3 \cdot 4 = 3 \cdot 2^2 \\ 32 = 4 \cdot 8 = 2^5 \end{array} \right\} m(12, 32) = 2^5 \cdot 3 = 32 \cdot 3 = 96$$

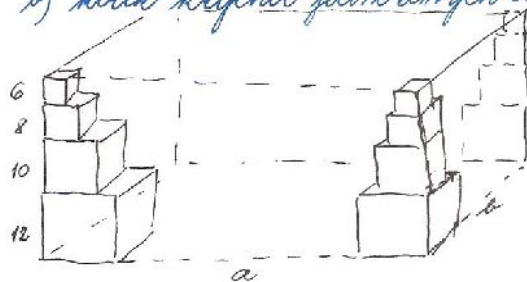
b) $\frac{7}{120}, \frac{5}{144}$

$120 = 4 \cdot 3 \cdot 10 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

$144 = 12 \cdot 12 = 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^2$ } $m(120, 144) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 16 \cdot 9 \cdot 5 = 80 \cdot 9 = 720$

- 6) V krabici stranu kvádru jsou ve 4 vrstvách uloženy 4 desky kuchle. V první vrstvě jsou kuchle s hranou délky 12 cm. V každé následující vrstvě je délka strany kuchle o 2 cm menší než délka strany kuchle v předcházející vrstvě. Uvědi:

- a) nejmenší možné vnější rozměry krabice,
b) kolik kuchlí jednovrstevných desek je v této nejmenší možné krabici.



a) výška krabice $a = 12 + 10 + 8 + 6 = 36$ (cm)

délka krabice (nejmenší - prostrata strana $a = b$)

- v každé řadě musí být celý počet krabic
⇒ hledáme minim. číslo dělitelné

$12, 10, 8, 6 \Rightarrow$

$a = m(12, 10, 8, 6) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
(=6) $= 8 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ cm

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$
 $10 = 2 \cdot 5 = 2 \cdot 5$
 $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$
 $6 = 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3$

ROZMĚRY: $120 \text{ cm} \times 120 \text{ cm} \times 36 \text{ cm}$

- b) 1. řada: $120 : 12 = 10$ (ks) ⇒ 1. vrstva: $10 \times 10 = 100$ ks
2. řada: $120 : 10 = 12$ (ks) ⇒ 2. vrstva: $12 \times 12 = 144$ ks
3. řada: $120 : 8 = 15$ (ks) ⇒ 3. vrstva: $15 \times 15 = 225$ ks
4. řada: $120 : 6 = 20$ (ks) ⇒ 4. vrstva: $20 \times 20 = 400$ ks

- 7) Uvědi nejmenší počet cvičenců, o nichž věd, že nastoupí-li do dvojstupu, trojstupu, čtyřstupu, pětistupu, šestistupu, bude vždy 1 cvičenec chybět do úplného (obdélníkového) stánu.

např. $\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{dvojstoup} \quad x = 2k_1 - 1 \\ \text{trojstoup} \quad x = 3k_2 - 1 \\ \text{čtyřstoup} \quad x = 4k_3 - 1 \\ \text{pětistoup} \quad x = 5k_4 - 1 \\ \text{šestistoup} \quad x = 6k_5 - 1 \end{array} \right\} k_i \in \mathbb{N}$$

$m(2, 3, 4, 5, 6) = 60 \Rightarrow x = 60 - 1 = 59$

- 8) Na fotbalový hřiště přišlo přibližně 10 000 diváků. Uvědi přesný počet diváků, věd-li, že o menším jednom mladý matematik prohlásil:

Když rozdělím počet diváků 10, dostanu zbytek 9, při dělení 9 zbytek 8 atd., až při dělení 2 dostanu zbytek 1.

Uvědi počet diváků.

$x = 10k_1 + 9 = 10(k_1 + 1) - 1$

$x = 9k_2 + 8 = 9(k_2 + 1) - 1$

$x = 8k_3 + 7 = 8(k_3 + 1) - 1$

$\vdots$

$x = 2k_9 + 1 = 2(k_9 + 1) - 1$

hledání
min. spol. násobku $m(2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$
 $= 2520$

ale diváků kolem 10 000 ⇒

⇒ $x = k \cdot 2520 - 1 \quad (k=4)$

$x = 4 \cdot 2520 - 1 \Rightarrow x = 10080 - 1 = 10079$ diváků